XX Межрегиональная олимпиада школьников по математике и криптографии

Задачи для 11 класса

Решение задачи 1

Сначала заметим, что после первого оборота количество дуг равно 2^2, после второго – 2^3, после последнего – 2^{n+1}. Пусть после оборота с номером k, $1 \le k \le n$ в точках деления окружности на дуги расположены числа $x_1, x_2, ..., x_{2^{k+1}}$.Тогда в ходе оборота с номером $k+1$ на окружности появятся следующие новые числа

$$y_1 = \frac{3x_1 + 3x_2}{2},\ y_2 = \frac{3x_2 + 3x_3}{2}, \ldots,\ y_{2^{k+1}} = \frac{3x_{2^{k+1}} + 3x_1}{2}.$$

Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^{2^{k+1}} y_i = 3 \cdot \sum_{i=1}^{2^{k+1}} x_i .$$

Значит, после $k+1$ оборота сумма всех чисел на окружности возрастёт в 4 раза. Если учесть, что первоначальная сумма чисел на окружности равнялась 6, то получаем окончательный ответ.

Ответ: $6 \cdot 4^n$.

Решение задачи 2

Граф, используемый в задаче, обладает следующим свойством: из множества всех его вершин можно выделить такое подмножество *V* (отмеченное на рис. 5 кружочками), что любая вершина графа лежит в окрестности ровно одной вершины из *V*. Окрестностью вершины графа называют множество соседних с ней вершин, включая её саму. Очевидно, что искомое число равно сумме чисел, расположенных в вершинах из множества *V*: $112+104+96+144+136+128+120=840$.

Ответ: 840.

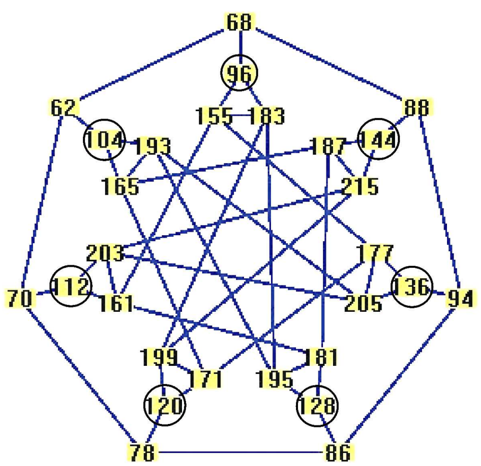

Рис. 5

Решение задачи 3

Составим, исходя из условия задачи, систему неравенств и запишем ее в виде двух подсистем:

$$\begin{cases} 0 < c, \\ a_4 < c, \\ a_3 \ge c, \\ a_3 + a_4 \ge c, \\ a_2 < c, \\ a_2 + a_4 < c, \\ a_2 + a_3 < c, \\ a_2 + a_3 + a_4 < c; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 < c, \\ a_1 + a_4 \ge c, \\ a_1 + a_3 \ge c, \\ a_1 + a_3 + a_4 \ge c, \\ a_1 + a_2 < c, \\ a_1 + a_2 + a_4 < c, \\ a_1 + a_2 + a_3 \ge c, \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \ge c. \end{cases}$$

Из первой подсистемы получаем:

$$\begin{cases} a_3 \ge c \\ a_2 + a_3 + a_4 < c \end{cases} \Rightarrow a_2 + a_4 < 0.$$

Из второй подсистемы получаем:

$$\begin{cases} a_1 < c \\ a_1 + a_4 \ge c \end{cases} \Rightarrow a_4 > 0;$$

$$\begin{cases} a_1 < c \\ a_1 + a_2 + a_3 \ge c \end{cases} \Rightarrow a_2 + a_3 > 0.$$

Подбираем некоторые целые числа, удовлетворяющие полученным соотношениям, например $a_4 = 1$, $a_2 = -2$, $a_3 = 3$. Подставляем их в первую подсистему, тогда $2 < c \le 3$. Полагаем $c = 3$ и подставляем во вторую подсистему, получаем $2 \le a_1 < 3$, тогда выбираем $a_1 = 2$.

Решение задачи 4

По двум последним строкам можно восстановить обратную перестановку и использовать её для расшифрования первого сообщения. Из-за повторов букв в полученных строках сделать это однозначно удаётся не всегда. Таким образом, задача сводится к выбору букв из столбцов глубины не более трёх, которые дают читаемый текст. Жирным шрифтом выделены выбранные буквы, в серых клетках указаны уже использованные буквы, не участвующие в выборе.

И	К	Л	М	Н	О	И	К	Л	М	Н	О	И	К	Л	М	Н	О	С	Т
И	К	О	О	К	М	Т	И	С	О	Н	И	Л	Н	Л	К	М	Л	М	Н
Варианты обратной перестановки:																			
1	2	6	6	2	4	20	1	19	6	5	1	3	5	3	2	4	3	4	5
7	8	12	12	8	10	20	7	19	12	11	7	9	11	9	8	10	9	10	11
13	14	18	18	14	16	20	13	19	18	17	13	15	17	15	14	16	15	16	17
Варианты открытого текста:																			
Н	**К**	М	М	К	А	Б	**Н**	И	**М**	К	Н	Б	**К**	Б	К	**А**	**Б**	А	К
О	Р	А	**А**	Р	Л	**Б**	О	**И**	А	**А**	О	О	А	**О**	**Р**	Л	О	**Л**	А
Е	Н	**Е**	Е	**Н**	**О**	Б	Е	И	Е	И	**Е**	**Т**	И	Т	Н	О	Т	О	**И**

Ответ: **океан обнимает корабли**

Решение задачи 5

Пусть $y = 14197777$, $N = p \cdot q = 56887111$, p, q – простые числа. По условию $НОД(x, N) = p > 1$, то есть $x = t \cdot p$, где t – натуральное число. Так как $y = r_N(x^3)$, где $r_N(x^3)$ – остаток от деления на N числа x^3, то $НОД(y, N) = p$. Вычисляя $НОД(14197777,\ 56887111)$, находим, что $p = 10667$, тогда $y = 1331 \cdot p$, а $q = \dfrac{N}{p} = 5333$.

Делим обе части уравнения

$$1331 \cdot p = r_N((t \cdot p)^3)$$

на p, получаем:

$$1331 = r_q\left(t^3 \cdot p^2\right) = r_{5333}\left(t^3 \cdot 10667^2\right) = r_{5333}\left(t^3\right).$$

Поэтому $t = \sqrt[3]{1331} = 11$ и $x = t \cdot p = 11 \cdot 10667 = 117337$.

Ответ: $x = 117337$.

Решение задачи 6

Сравним посимвольно последовательности цветов, приведённые в условии и сформируем таблицу:

С	К	З	К	К	К	К	З	З	К	К	С	С	К	К	З	С	З	С	К	**Светофильтры Чебурашки**
К	К	З	З	З	С	К	С	К	С	З	З	С	К	С	К	С	К	З	К	**Светофильтры Шапокляк**
					*				*	*			*			*		*		**Срабатывание датчика**
	Ч	Ч			Ч	Ч			Ч	Ч		Ч	К			С		Ч	Ч	**Комбинация Гены**

На каждой позиции возможны четыре варианта: совпали или нет цвета светофильтров Чебурашки и Шапокляк, сработал или нет у Шапокляк датчик. Рассмотрим эти варианты:

- цвета не совпали, датчик не сработал. Тогда в этой позиции кодовой комбинации Гена выставит чёрный цвет или цвет, выбранный Чебурашкой (всего 2 варианта);

- цвета совпали, датчик сработал, тогда Гена выставит тот же цвет
(1 вариант);

- цвета совпали, датчик не сработал или цвета не совпали, но датчик сработал. Тогда Гена выставит чёрный цвет (1 вариант).

Ответом будем число $4^{20}-2^{k}$, где k – число позиций, где (в которых) цвета не совпали и датчик не сработал. В данном случае $k=9$.

Ответ: $4^{20}-2^{9}$.

Критерии определения победителей и призеров XX межрегиональной олимпиады школьников по математике и криптографии

Жюри XX Межрегиональной олимпиады школьников по математике и криптографии установило следующие критерии определения победителей и призеров среди учащихся 11 классов:

1 место - полностью решены не менее пяти задач;

2 место - полностью решены не менее четырех задач;

3 место - полностью решены не менее трех задач.